数理解析研究所講究録
120巻 1971年 154-160

渦糸のよじれ

農工大教養　高木隆司
東大理　吉沢徹

§1. 序

完全流体の中に1本の渦糸が存在するとき，もしその渦糸が直線ならばそれは静止したままであるが，渦糸が曲率を持つときは渦糸自身の誘導する速度で運動する．渦糸のよじれが大きくなって自分自身と交叉するようなばあいを除くと，渦糸上の点の運動を表わす方程式は

$$\frac{\partial x}{\partial t}=A\frac{\partial x}{\partial l}\times\frac{\partial^2 x}{\partial l^2},$$

である．lは渦糸に沿っての座標である．（この式の導出は，Batchelor の *An Introduction to Fluid Dynamics*, Ch. 7 にある．）

渦糸の運動や変形を研究することは，それ自身が流体力学上おもしろい問題であること，気象現象や工学の分野でこれに相当するものが現れること，乱流の構造を解明するためのひとつのモデルになることなどの理由から非常に興味あることである．

§2．線型理論

渦糸の形が直線からわずかにずれているとき，そのずれについて方程式を線型化することができる．今，渦糸上の点の座標を

$$\mathbf{x} = \mathbf{i}_3 z + \tilde{\mathbf{x}} \qquad ,(\mathbf{i}_3\ \text{は}\ z\ \text{方向の単位ベクトル})$$

とすると，線型化された方程式は

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} = A\,\mathbf{i}_3 \times \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{x}}}{\partial l^2}$$

であり，これをフーリエ変換して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A k^2 \mathbf{i}_3 \times\right) \tilde{\mathbf{y}} = 0$$

を得る．ただし，

$$\tilde{\mathbf{y}} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ikl}\cdot\tilde{\mathbf{x}}(l,t)\,dl\,.$$

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とおくと，この方程式の才1，2成分は

$$\dot{y}_1 - Ak^2 y_2 = 0\,, \qquad \dot{y}_2 + Ak^2 y_1 = 0$$

となり，y_2 を消去しすると

$$\ddot{y}_1 + A^2 k^4 y_1 = 0\,.$$

これから

$$y_1 = a\,e^{iAk^2t} + be^{-iAk^2t}$$

を得る．特別なばあいとして，

I. $a=b$ のとき

$$y_1 = 2a\cos Ak^2t,\quad y_2 = -2a\sin Ak^2t,$$

となり，1平面上の正弦波を表わす．

II. $a=0$ のとき

$$y_1 = be^{-iAk^2t},\quad y_2 = -ibe^{-iAk^2t},$$

となり，立体的なつるまき線を表わす．

上のどちらも周期 $2\pi/(Ak^2)$ で x 軸のまわりを回っている．

§3. 有限振幅の波形を持つ渦糸の運動 —— 数値実験

渦糸の形の直線からのずれが大きいときは，簡単な線型理論からのはずれが現れる．ここでは，初期に1平面上の正弦波であった渦糸が，時間とともにどのように運動していくかを，数値計算によって調べてみる．

渦糸上に正弦波の1波長当り 24 コの点を取り，各点の位置を刻一刻求めることにより渦糸の運動を調べる．正弦波の1波長を代表の長さとし，正弦波の振幅は 0.1, 0.3, 0.6 のばあいを計算した．時間の微小間隔 Δt で時間を無次元化すると，解かれるべき差分方程式は

$$x^{n+1} - x^{n} = B\,\frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta l} \times \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta l^2},$$

である。ただし B は無次元量で， $B = A\Delta t/\lambda^2$ である（λは波長）．以下に数値計算の結果を示す．

I．正弦曲線の旋回の周期

渦糸が z 軸のまわりをひとまわりする時間を図1に示す．縦軸上の白丸は前節の線型理論で導びかれた周期 $2\pi/(Ak^2)$ を無次元化したものである．

周期の振幅による変化はかなり大きいことがわかる．

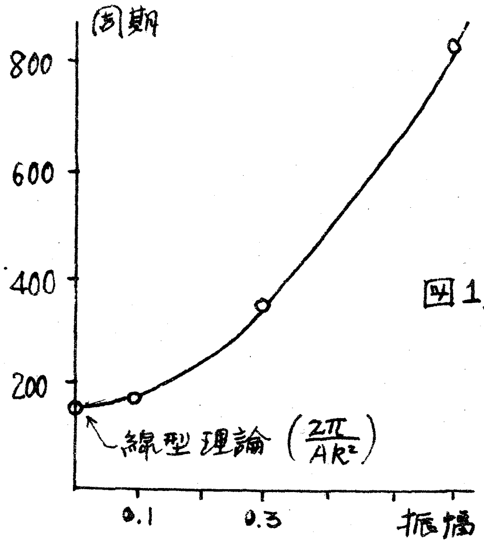


図1

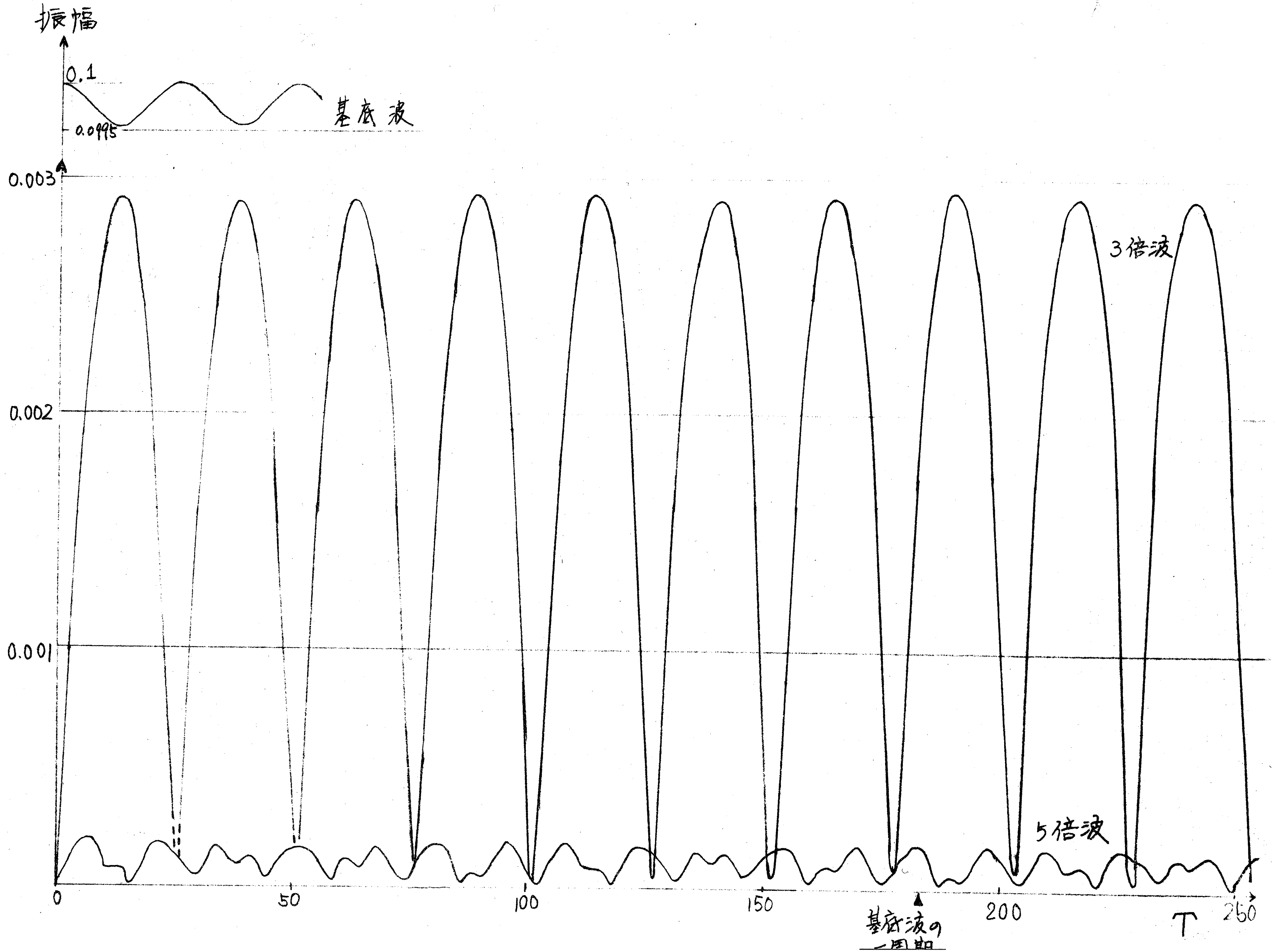
II．基底波の変動，高調波の出現

非線型な相互作用により，初期には基底波だけであってもやがて高調波が現れてくる．渦糸上の点の x 成分，y 成分をそれぞれ z についてフーリエ変換し，各高調波について x 成分と y 成分の2乗の和をもとめその平方根をとる．それが各高調波の大きさと解釈できる．

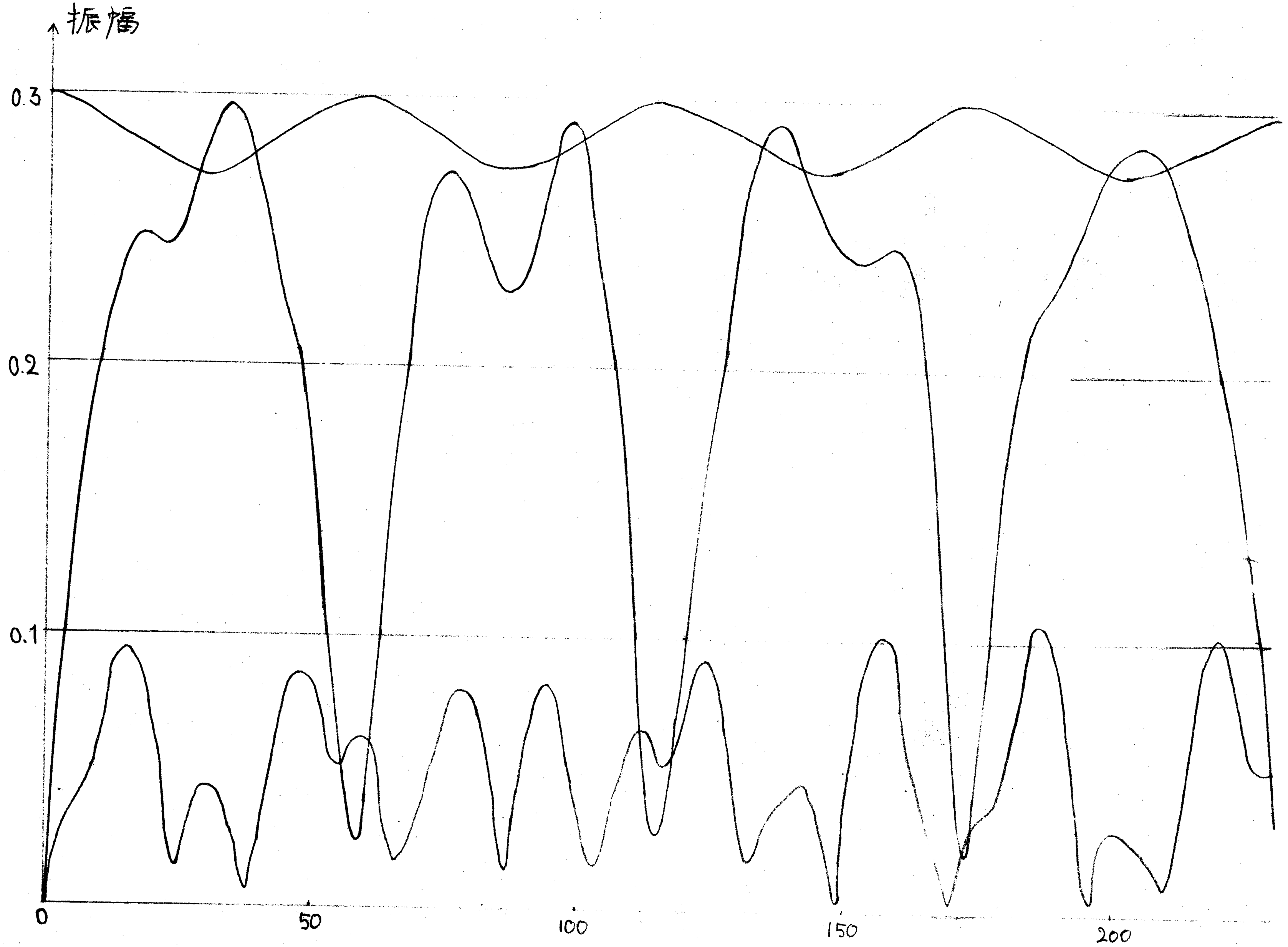
振幅が0.1と0.3のばあいを図2，3に示す．問題の性質上奇数倍の高調波だけが現れる．振幅0.1のばあいはかなり規則的である．3倍波が周期的に弱くなり，振幅が0になるように見える．これは一種の再帰現象と考えることができる．

振幅0.3のばあいは規則性はより小さくなる．しかし，周期約172で似た変動をくり返しているように見える．また1周期毎に高調波が非常に弱くなり基底波が初期の強さになる．しかし，3倍と5倍の波が弱くなる時刻はわずかにずれていて，そのために再帰性はそれほど顕著でない．このわずかのずれは，2回目の $T \approx 344$ では増大している．たぶんこれをくりかえす毎に増大していき，やがて全体が乱れた状態になることが想像される．

この現象を解析的に調べることも重要であろう．規則性からいかにして乱雑さがあらわれるか，という問題に対するひとつの究明法を与えることが予想される．



振幅
0.1
0.0995
基底波
0.003
0.002
0.001
3倍波
5倍波
0
50
100
150
200
250
T
基底波の一周期


振幅
0.3
0.2
0.1
0
50
100
150
200